

DEMOSTRACIÓN

Dado $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ demuestre la ley del paralelogramo

Desarrollo

Sea $u, v \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\|u + v\|^2 = (u + v)(u + v)$$

$$\begin{aligned} &= u \cdot u + uv + v \cdot u + vv \\ &= \|u\|^2 + 2uv + \|v\|^2 \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= (u - v)(u - v) \\ &= u \cdot u - u \cdot v - v \cdot u + vv \\ &= \|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 &= (\|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2) + (\|u\|^2 + 2uv + \|v\|^2) \\ &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \end{aligned}$$